DƯỚI VI PHÂN CỦA HÀM LỒI XẤP XỈ

Phùng Xuân Lễ
Trường Đại học Phú Yên
Email: phungxuanle@pyu.edu.vn
Ngày nhận bài: 23/5/2023; Ngày nhận đăng:01/07/2023

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số kết quả dưới vi phân của hàm lồi xấp xỉ định nghĩa trên không gian Banach X. Các kết quả này đã được đưa ra bởi các tác giả Huỳnh Văn Ngãi, Nguyễn Hữu Trọn và Michel Théra. Tuy nhiên, hầu hết chứng minh vắn tắt hoặc không chứng minh. Ở đây, chúng tôi trình bày với chứng minh chặt chẽ và chi tiết.

Từ khóa: *Hàm lồi xấp xỉ, dưới vi phân, hàm $\varepsilon -$ lồi, hàm $\varepsilon -$ liên hợp.*

Subdifferential of the convex approximate function

Phung Xuan Le
Phu Yen University
Received: April 07, 2023; Accepted: July 01, 2023

Abstract

In this article, we present some results on the subdifferential of the convex approximate function defined on a Banach space X. These results were proposed by Huynh Van Ngai, Nguyen Huu Tron and Michel Théra. However, most of them were not proved in full detail. In here, we present them in more detail with proof.

Keywords: *Approximate convex function, subdifferential, $\varepsilon -$ convex function, $\varepsilon -$ conjugate function.*

1. Đặt vấn đề

Lớp các hàm lồi đóng một vai trò quan trọng trong Toán học và các ngành khoa học ứng dụng. Suốt thập kỷ qua, nhiều kết quả được mở rộng dựa vào tính lồi. Tuy nhiên, tính lồi thường là những giả thiết quá mạnh trong việc ứng dụng, chẳng hạn như trong Toán kinh tế. Nhiều vấn đề trong thực tiễn, ta phải làm việc với những đối tượng nói chung không lồi theo nghĩa chính thống. Vì vậy, việc khảo sát những đối tượng (tập hợp, hàm) không lồi nhưng vẫn giữ được (một số) tính chất đẹp của tính lồi là có ý nghĩa quan trọng. Những đối tượng như thế được gọi là lồi tổng quát.

Gần đây, người ta quan tâm nhiều đến các lớp hàm lồi tổng quát như lớp các hàm *dưới*$-$ C^1, *dưới*$-$ C^2; *hàm nửa trơn*; *hàm lồi xấp xỉ*. Trong bài báo này chỉ khảo sát, nghiên cứu lớp *dưới vi phân của hàm lồi xấp xỉ*.

2. Các khái niệm và định lý

Một số khái niệm liên quan đến phần này mà không nhắc đến trong bài báo, có thể tìm thấy trong (Aubin & Frankowska, 1990; Yên, 2007).

2.1. Một số khái niệm về hàm lồi và hàm $\varepsilon -$ lồi

Phần này trình bày một số khái niệm sẽ được dùng ở phần sau.

Định nghĩa 2.1.1 (Aubin & Frankowska, 1990). Hàm f được gọi là hàm lồi nếu thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \text{ với mọi } x,\ y\in X,\ \lambda\in[0,1].$$

Định nghĩa 2.1.2 (Aubin & Frankowska, 1990). Giả sử X là không gian Banach. Hàm $f: X\to\mathbb{R}$ được gọi là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}\in X,$ nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}\in X,$ số $K>0$ sao cho

$$\left|f(x)-f(x')\right|\le K\|x-x'\|, \text{ với mọi } x,\ x' \in U.$$

Định nghĩa 2.1.3. Hàm f được gọi là *nửa liên tục dưới* tại $\bar{x}\in X,$ nếu với mọi $\varepsilon>0,$ tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$f(\bar{x})-\varepsilon\le f(y), \text{ với mọi } y\in U.$$

Định nghĩa 2.1.4 (Hoang Tuy, 1997). Hàm f được gọi là hàm $\varepsilon-$*lồi* nếu thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|,\ x,\ y\in X,\ \lambda\in(0,1).$$

Ví dụ. Hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=-|x|$ là hàm $2-$*lồi.*

Định nghĩa 2.1.5 (Hoang Tuy, 1997). Cho f là hàm $\varepsilon-$*lồi,* $y\in X$ cố định. Hàm $\varepsilon-$*liên hợp* $f_y^*(\varepsilon,\ .): X^*\to\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ của f tại y được định nghĩa bởi

$$f_y^*(\varepsilon,\ \xi):\ =\sup_{x\in X}\left\{\langle\xi,x\rangle-f(x)-\varepsilon\|x-y\|\right\}.$$

Định nghĩa 2.1.6. Hàm $\varepsilon-$*liên hợp thứ hai* $f_y^{**}(\varepsilon,\ .): X\to\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ của f tại y được định nghĩa bởi

$$f_y^{**}(\varepsilon,\ x):=\sup_{\xi\in X^*}\left\{\langle\xi,x\rangle-f_y^*(\varepsilon,\xi)\right\}.$$

2.2. Hàm lồi xấp xỉ

Phần này, chúng tôi trình bày một số khái niệm cơ bản của *hàm lồi xấp xỉ* trên không gian Banach.

Cho $f: X\to\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới. Với mỗi $\delta>0,$ ta định nghĩa hàm f_δ như sau

$$f_\delta(x)=\begin{cases} f(x), & x\in B(x_0,\ \delta)\\ \infty, & x\notin B(x_0,\ \delta).\end{cases}$$

Định nghĩa 2.2.1. Hàm f gọi là lồi xấp xỉ tại $x_0\in X$ nếu với mỗi $\varepsilon>0,$ tồn tại $\delta>0$ sao cho f_δ là hàm $\varepsilon-$lồi, tức là với mỗi $\varepsilon>0,$ tồn tại $\delta>0$ sao cho

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|,\ x,\ y\in B(x_0,\delta),\ \lambda\in(0,1).$$

Hàm f lồi xấp xỉ trên một tập khác rỗng $C\subseteq X$ nếu f là hàm lồi xấp xỉ tại mọi $x\in C.$

Khi $C = X$ ta nói f là hàm lồi xấp xỉ.

Nhận xét 2.2.2. Từ định nghĩa ta thấy, một hàm lồi là lồi xấp xỉ điều ngược lại nói chung không đúng. Chẳng hạn, lấy hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=-x^2.$ Khi đó, f là hàm lồi xấp xỉ nhưng không là hàm lồi. Thật vậy, $\forall\varepsilon>0$, chọn $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó, với mọi $\lambda\in(0,1),\ x,\ y\in\mathbb{R},\ |x|<\delta,\ |y|<\delta,$ ta có

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)=-\left[\lambda x+(1-\lambda)y\right]^2=-\lambda^2x^2-(1-\lambda)^2y^2-2\lambda(1-\lambda)xy,$$

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=-\lambda^2x^2-(1-\lambda)^2y^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned}&f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)-\lambda f(x)-(1-\lambda)f(y)-\varepsilon\lambda(1-\lambda)|x-y|=\\&=-\lambda^2x^2+\lambda x^2-(1-\lambda)^2y^2+(1-\lambda)y^2-2\lambda(1-\lambda)xy-\varepsilon\lambda(1-\lambda)|x-y|\\&=\lambda(1-\lambda)x^2+\lambda(1-\lambda)y^2-2\lambda(1-\lambda)xy-\varepsilon\lambda(1-\lambda)|x-y|\\&=\lambda(1-\lambda)\left[(x-y)^2-\varepsilon|x-y|\right]\le 0,\ \forall|x|,\ |y|<\delta.\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ f là hàm lồi xấp xỉ. Nhưng f không là hàm lồi, vì với mọi $\lambda\in(0,1),$ với mọi $x\neq y,$ ta có $\lambda(1-\lambda)(x-y)^2>0$ nên

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall\lambda\in(0,1),\ \text{với mọi } x\neq y.$$

2.3. Dưới vi phân của hàm lồi xấp xỉ

Phần này, chúng tôi trình bày một số tính chất cơ bản nhất có thể gọi là đẹp *của dưới vi phân hàm lồi xấp xỉ* trên không gian Banach.

Định nghĩa 2.3.1 (Yên, 2007). Dưới vi phân của hàm f tại $\bar{x}$, ký hiệu $\partial f(\bar{x})$, được định nghĩa như sau

$$\partial f(\bar{x})=\left\{x^*\in X^*: f(x)-f(\bar{x})\ge\left\langle x^*,x-\bar{x}\right\rangle,\forall x\in X\right\}.$$

Định nghĩa 2.3.2. Dưới vi phân Clarke của hàm f tại $x\in domf$, ký hiệu $\partial^C f(x)$, được định nghĩa như sau

$$\partial^C f(x)=\left\{x^*\in X^*:\left\langle x^*,v\right\rangle\le f^{\uparrow}(x,v),\forall v\in X\right\}.$$

Định nghĩa 2.3.3. Dưới vi phân Fréchet của hàm f tại $x\in domf$, ký hiệu $\partial^F f(x)$, được định nghĩa như sau

$$\partial^F f(x)=\left\{x^*\in X^*:\liminf_{\|h\|\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\left\langle x^*,h\right\rangle}{h}\ge 0\right\}.$$

Định nghĩa 2.3.4. $\varepsilon-$ dưới vi phân của hàm f tại $x\in domf$, ký hiệu $\partial_\varepsilon^F f(x)$, được định nghĩa như sau:

$$\partial_\varepsilon^F f(x)=\left\{x^*\in X^*:\liminf_{\|h\|\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\langle x^*,h\rangle}{h}\geq -\varepsilon\right\}.$$

Định nghĩa 2.3.5 (Yên, 2007). Dưới vi phân Mordu Khovich của hàm f tại $x\in domf$, ký hiệu $\partial^M f(x)$, được định nghĩa như sau

$$\partial^M f(x)=seq-\limsup_{y\to x,\varepsilon\downarrow 0}\partial_\varepsilon^F f(y).$$

trong đó, "$seq-\limsup$" ký hiệu giới hạn trên Pailevé-Kuratowski của một tập, tức là

$$seq-\limsup_{y\to x}\partial_\varepsilon^F f(y)=\left\{x^*\in X^*:\exists x_n\to x, x_n^*\to x^*, x_n^*\in\partial_\varepsilon^F f(x_n)\right\}.$$

Định lý 2.3.6 (Ngai, Tron, & Thera, 2000). *Cho X là một không gian Banach, $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới, lồi xấp xỉ tại $x_0\in domf$. Khi đó, ta có*

$$\partial^C f(x_0)=\partial^M f(x_0)=\partial^F f(x_0)=\partial f(x_0).$$

Chứng minh. Theo định nghĩa, ta có

$$\partial^F f(x_0)\subseteq\partial^C f(x_0),\ \partial^F f(x_0)\subseteq\partial^M f(x_0),\ \partial^F f(x_0)\subseteq\partial f(x_0).$$

Ta cần chứng tỏ rằng $\partial^C f(x_0)\subseteq\partial^F f(x_0)$, $\partial^M f(x_0)\subseteq\partial^F f(x_0)$, $\partial f(x_0)\subseteq\partial^F f(x_0)$.

Vì f là hàm lồi xấp xỉ tại x_0 nên với $\varepsilon>0$ tùy ý, tồn tại $\delta>0$ sao cho

$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)+\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x-y\|$, $x, y\in B(x_0,\delta)$, $\lambda\in(0,1)$.

Lấy $x^*\in\partial^C f(x_0)=\partial^C f_\delta(x_0)\subseteq x^*\in\partial^\varepsilon f_\delta(x_0)$, ta có

$$\langle x^*,h\rangle\leq f(x_0+h)-f(x_0)+\varepsilon\|h\|,\ \forall h\in B(0,\delta).$$

Suy ra

$$x^*\in\partial^F f(x_0)\text{ hay }\partial^C f(x_0)\subseteq\partial^F f(x_0).$$

Ta chứng tỏ $\partial^M f(x_0)\subseteq\partial^F f(x_0)$.

Lấy $x^*\in\partial^M f(x_0)$, $\exists\{\varepsilon_n\}\downarrow 0$, $\{x_n\}\to x_0$, $\{x_n^*\}\xrightarrow{w}x^*$ với $x_n^*\in\partial_{\varepsilon_n}^F f(x_n)$. Chọn các dãy số không âm $\gamma_n\downarrow 0$. Theo định nghĩa, với mỗi n ta tìm một số $\eta_n>0$ sao cho

$$\langle x_n^*,h\rangle\leq f(x_n+h)-f(x_n)+(\varepsilon_n+\gamma_n)\|h\|,\ \forall h\in B(x_n,\eta_n).$$

Giả sử $x_n\in B(x_0,\delta),\forall n\geq n_0$. Với bất kỳ $y\in B(x_0,\delta)$, chọn $t\in(0,\ 1)$ sao cho $h\|y-x_n\|<\eta_n$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}\langle x_n^*,\ t(y-x_n)\rangle&\leq f(x_n+t(y-x_n))-f(x_n)+(\varepsilon_n+\gamma_n)\|y-x_n\|\\&\leq(1-t)f(x_n)+tf(y)-f(x_n)+t(\varepsilon(1-t)+\varepsilon_n+\gamma_n)\|y-x_n\|.\end{aligned}$$

Suy ra

$\langle x_n^*,y-x_n\rangle\leq f(y)-f(x_n)+(\varepsilon+\varepsilon_n+\gamma_n)\|y-x_n\|$. Cho $n\to\infty$ ta được

$$\langle x^*, y-x_0 \rangle \le f(y) - f(x_0) + \varepsilon\|y-x_0\|.$$

Điều này, chứng tỏ $x^* \in \partial^F f(x_0)$, vậy $\partial^M f(x_0) \subseteq \partial^F f(x_0)$.

Cuối cùng chứng tỏ $\partial f(x_0) \subseteq \partial^F f(x_0)$. Lấy $x^* \in \partial f(x_0)$, vì f là hàm lồi xấp xỉ tại x_0 nên với $y \in B(x_0,\delta)$ cố định và $t \in (0,1)$ ta có

$$\frac{f(x_0 + t(y-x_0)) - f(x_0)}{t} \le f(y) - f(x_0) + \varepsilon(1-t)\|y-x_0\|.$$

Cho $t \downarrow 0$ ta được

$$f'(x_0, y-x_0) \le f(y) - f(x_0) + \varepsilon\|y-x_0\|.$$

Suy ra $x^* \in \partial^F f(x_0)$. Vậy $\partial f(x_0) \subseteq \partial^F f(x_0)$.

Từ định lý trên, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.3.7 (Ngai, Tron, & Thera, 2000). *Giả sử $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới, lồi xấp xỉ tại $z \in X$. Khi đó, nếu $0 \in \partial^F f(z)$ thì z là cực tiểu địa phương của hàm $f(.) + \varepsilon\|. z\|$, $\forall \varepsilon > 0$.*

Chứng minh. Theo định lý 2.3.6, $\partial^C f(z) = \partial^F f(z)$, do đó $0 \in \partial^F f(z)$, tức là với mỗi $\varepsilon > 0$ ta có $f(z+h) + \varepsilon\|h\| \ge f(z)$, với h *đủ gần* 0. Điều này chứng tỏ z là cực tiểu địa phương của hàm $f(.) + \varepsilon\|. z\|$, $\forall \varepsilon > 0$.

Ta đã biết, đối với hàm lồi, dưới vi phân của một tổng bằng tổng các dưới vi phân. Liệu tính chất này, còn đúng cho hàm lồi xấp xỉ, ta có định lý sau.

Định lý 2.3.8 (Ngai, Tron, & Thera, 2000). *Cho X là không gian Banach, $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là các hàm nửa liên tục dưới, chính thường. Giả sử, $domf_1$, $domf_2$ là các tập lồi và f_1, f_2 là các hàm lồi xấp xỉ tại $domf_1 \cap domf_2$. Khi đó,*

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) \supseteq \partial(f_1)(x_0) + \partial(f_2)(x_0).$$

Nếu $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(domf_1 - domf_2)$ - không gian con đóng của X (gọi là điều kiện Attouch-Brézis) thì

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) = \partial(f_1)(x_0) + \partial(f_2)(x_0).$$

Chứng minh. Từ định nghĩa, ta suy ra $\partial(f_1 + f_2)(x_0) \supseteq \partial(f_1)(x_0) + \partial(f_2)(x_0)$.

Lấy $\varepsilon > 0$ tùy ý, cố định. Vì f_1, f_2 là các hàm lồi xấp xỉ nên tồn tại $\delta > 0$ và các hàm lồi nửa liên tục dưới $g^1_{x_0}$, $g^2_{x_0}$ sao cho

$$\left| f_i(x) - g^i_{x_0}(x) \right| \le \varepsilon\|x - x_0\|, \ \forall x \in B(x_0,\delta),\ i = 1,2.$$

Suy ra

$$domf_i \cap B(x_0,\delta) = domg^i_{x_0} \cap B(x_0,\delta) \text{ và } \partial g^i_{x_0}(x_0) \subseteq \partial f_i(x_0) + \varepsilon B_{X^*},\ i = 1,2.$$

Do đó,

$$\partial\left(f_1+f_2\right)\left(x_0\right)\subseteq\partial\left(g_{x_0}^1+g_{x_0}^2\right)\left(x_0\right)+2\varepsilon B_{X^*}.$$

Hơn nữa,

$$\bigcup_{\lambda>0}\lambda\left(domf_1-domf_2\right)=\bigcup_{\lambda>0}\lambda\left(domf_1\cap B\left(x_0,\delta\right)-domf_2\cap B\left(x_0,\delta\right)\right).$$

Theo định nghĩa, ta có bao hàm thức "$\supset$".

Bây giờ ta chứng minh,

$$domf_1-domf_2\subset\bigcup_{\lambda>0}\lambda\left(domf_1\cap B\left(x_0,\delta\right)-domf_2\cap B\left(x_0,\delta\right)\right).$$

Giả sử $x\in\left(domf_1-domf_2\right)$, tức là $x=x_1-x_2$, với $x_1\in domf_1,\ x_2\in domf_2$.

Chọn $0<\gamma$ đủ nhỏ sao cho $\gamma\left\|x_i-x_0\right\|<\delta,\ i=1,2.$ Vì $domf_1,\ domf_2$ là các tập lồi nên với $y_i:=\left(1-\gamma\right)x_0+\gamma x_i\in domf_i,\ i=1,2.$

Hơn nữa,

$$\left\|y_i-x_0\right\|=\gamma\left\|x_i-x_0\right\|<\delta,\ i=1,2, \text{ tức là } y_i\in B\left(x_0,\delta\right),\ i=1,2.$$

Suy ra, $y_i\in domf_i\cap B\left(x_0,\delta\right)$. Do đó,

$$x=x_1-x_2=\frac{1}{\gamma}\left(y_1-y_2\right)\in\frac{1}{\gamma}\left(domf_1\cap B\left(x_0,\delta\right)-domf_2\cap B\left(x_0,\delta\right)\right).$$

Suy ra,

$$domf_1-domf_2\subset\bigcup_{\lambda>0}\lambda\left(domf_1\cap B\left(x_0,\delta\right)-domf_2\cap B\left(x_0,\delta\right)\right).$$

Vậy định lý được chứng minh.

Từ định lý trên, ta có hệ quả sau.

Hệ quả. 2.3.9. *Giả sử* f_1, f_2 *là các hàm lồi xấp xỉ tại* $x_0\in domf_1\cap Int(domf_2)$. *Khi đó,*

$$\partial\left(f_1+f_2\right)\left(x_0\right)=\partial\left(f_1\right)\left(x_0\right)+\partial\left(f_2\right)\left(x_0\right).$$

Chứng minh. Theo định lý 2.3.8, ta có

$$\bigcup_{\lambda>0}\lambda\left(domf_1-domf_2\right)=\bigcup_{\lambda>0}\lambda\left(domf_1\cap\bar{B}\left(x_0,\delta\right)-domf_2\cap\bar{B}\left(x_0,\delta\right)\right)=\bigcup_{\lambda>0}\lambda\bar{B}\left(x_0,\delta\right).$$

4. Kết luận

Bài báo đã thực hiện được các vấn đề sau:

Chứng minh chi tiết các kết quả, định lý 2.3.6, định lý 2.3.8.

Định lý 2.3.6, tính chất quan trọng cho dưới vi phân của hàm lồi xấp xỉ.

Định lý 2.3.8, kết quả dưới vi phân của một tổng cho hàm lồi xấp xỉ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Aubin, J. P., Frankowska, H. (1990) *Set-valued Analysis*, Springer, Berlin.

Huynh Van Ngai, Nguyen Huu Tron, and Michel Théra. (2000). *Approximate convex function.,* Math. Prog.

Hoang Tuy (1997). *Convex Analyis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers.

Nguyễn Đông Yên (2007). *Giải tích đa trị*, NXB Khoa học Tự nhiên và Công nghệ.